⑦ Théorème de Bohr-Mollerup

[RUD p94]
[ROM EX 132]

Soit f déf et positive sur $]0,+\infty[$ tq :

① $f(x+1) = x f(x)$

② $f(1) = 1$

③ f est log-convexe sur $]0,+\infty[$

Alors $f(x) = \Gamma(x)$ sur $]0,+\infty[$ où $\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

• Existence d'une telle fct :

La fct Γ satisfait les 3 propriétés (donc une telle fct existe !)

① $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x}\, dt = \left[e^{-t} t^{x} \right]_0^{+\infty} + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$

$= x\Gamma(x)$

Les fcts mises en jeu dans l'IPP sont toutes $\mathcal{C}^1$ et $\int$ables sur $\mathbb{R}_+^*$.

② $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$

③ Soit $0<x<y<+\infty$, $\lambda \in]0,1[$. On écrit $\lambda = \frac{1}{p}$, $p>1$ et $1-\lambda = \frac{1}{q}$, $q>1$ de sorte que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Alors $\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\lambda(x-1)}\, t^{(1-\lambda)(y-1)}\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} t^{x-1}\right)^{1/p} \left(e^{-t} t^{y-1}\right)^{1/q} dt$$

Hölder $\leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1}\, dt\right)^{1/q}$

donc $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda\, \Gamma(y)^{1-\lambda}$

donc $\ln(\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)) \leq \lambda \ln\Gamma(x) + (1-\lambda)\ln\Gamma(y)$

donc $\ln\circ\Gamma$ convexe sur $]0,+\infty[$.

• Unicité de la fct

Soit f vérifiant les 3 pts, soit $x>0$, $n \in \mathbb{N}$. On applique successivement ① pour avoir $f(x+n) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k) f(x)$

Ainsi les valeurs de f sur $]0,+\infty[$ sont déterminées par celles de f sur $]0,1]$. En particulier, on a $f(n) = (n-1)!$

Par conséquent, pr démontrer le thm, il suffit de mq $f(x)=\Gamma(x)$ pour $x \in]0,1]$.

On va exprimer la log convexité en écrivant l'inégalité des pentes (marche car $x \in]0,1]$) en les pts $(-1+n)$ et n, $(x+n)$ et n, et $(1+n)$ et n :

$$\frac{-\ln f(-1+n) + \ln f(n)}{+1+n-n} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x+n-n} \leq \frac{\ln f(1+n) - \ln f(n)}{1+n-n}$$

$$\Rightarrow \ln f(n) - \ln f(-1+n) \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x} \leq \ln f(1+n) - \ln f(n)$$

or $\ln f(n) - \ln f(n-1) = \ln\left(\frac{f(n)}{f(n-1)}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)f(n-1)}{f(n-1)}\right) = \ln(n-1)$

De m̂, $\ln f(1+n) - \ln f(n) = \ln(n)$.

donc $x\ln(n-1) \leq \ln f(x+n) - \ln f(n) \leq x\ln(n)$

$\Rightarrow \ln((n-1)^x) + \ln f(n) \leq \ln f(x+n) \leq \ln(n^x) + \ln f(n)$

Or, $\ln f(n) = \ln((n-1)!)$

donc $\ln((n-1)^x (n-1)!) \leq \ln f(x+n) \leq \ln(n^x (n-1)!)$

Par strict croissance de $\ln$, on a :

$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!$

et on a vu que $f(x+n) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k) f(x)$, donc on a :

$$\frac{(n-1)!\,(n-1)^x}{(x+n-1)\dots x} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{(x+n-1)\dots x} = \frac{n^x n!}{(x+n)\dots n}\ \frac{x+n}{n}$$

L'inég à gche est vraie $\forall n \geq 2$, donc on peut changer n en $n+1$

$$\frac{n^x n!}{(x+n)\dots x} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\dots n}\ \frac{x+n}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{n f(x)}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\dots x} \leq f(x)$$

On passe à la limite qd $n \longrightarrow +\infty$ et on a :

$$f(x) = \lim_{n\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots x} \quad \text{pr } x \in]0,1]$$

Ceci étant en particulier vrai pr Γ sur $]0,1]$, on a :

$\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$

dc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \Gamma(x)$ ▨

Application avec la fct Bêta : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$.

Mq $B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Pour y fixé >0, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(x) = \dfrac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$. Cette fct est à valeurs >0 tq :

① $\phi(1) = \dfrac{B(1,y)\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)} = yB(1,y) = \int_0^1 y(1-t)^{y-1}\,dt = 1$

② $\forall x>0$, $\phi(x+1) = (x+y)B(x+1,y)\dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$

avec $(x+y)B(x+1,y) = xB(x,y)$.

donc $\phi(x+1) = x\,\phi(x)$

③ De ⊕, $x \mapsto \Gamma(x+y)$ et $x \mapsto B(x,y)$ log convexes sur $\mathbb{R}_+^*$

dc de m̂ pr le produit, donc pour ϕ.

dc par th de Bohr Mollerup, $\phi = \Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$

dc $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ▨

Rques ① Inégalité des pentes : Soit $x \in]0,1]$

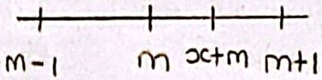
entre $n-1$ et n, $x+n$ et n et $1+n$ et n

De manière générale, on a pour $a<b<c$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \underset{①}{\leq} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \underset{②}{\leq} \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

ici on a :

$n-1 < n < x+n < n+1$



pour $b = x+n$, $a = n$ et $c = 1+n$, on a

$$\frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x+n-n} \underset{①}{\leq} \frac{\ln f(1+n) - \ln f(n)}{1+n-n}$$

De m̂ on a l'autre inégalité pour :

$a = -1+n$, $b = n$, $c = x+n$:

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{n-n+1} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n-1)}{x+n-n+1} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x}$$

dc $\ln f(n) - \ln f(n-1) \leq \dfrac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x}$

② savoir mq $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\infty} \dfrac{n^x n!}{x\cdots(x+n)}$